Sum of Infinitesimal Random Variables

釜江, 哲朗

数理解析研究所講究録
701 巻 1989 年 31-38

Sum of Infinitesimal Random Variables

大阪市大・理　釜江哲朗（Teturo KAMAE）

無限分解可能な確率変数は，無限小確率変数列の独立和として表現される。このことを利用して，無限分解可能な確率変数の特性関数に対するLévyの標準形を導く。以下，可算飽和なノンスタンダードモデルを考える。

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$は内的確率空間とし，これに対応するローブ確率空間が$(\Omega, \mathcal{B}, P)$がnonatomicであるとする。無限の超自然数Mをとり，$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$上の*独立同一分布に従がう内的確率変数列$(X_n, n=1, \cdots, M)$を考える。このとき，

$$^\circ\sum_{n=1}^{M} X_n$$

は$(\Omega, \mathcal{B}, P)$上の$\mathbb{R}\cup\{-\infty, \infty\}$値確率変数となる。$X = X_1$とおき，$\varphi_X$を$X$の*特性関数とする。

基本補題

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M} X_n \in \mathbb{R}\right) = 1$$

が成立するための必要十分条件は，$t \in {}^*\mathbb{R}$ の関数

$$M(1-\varphi_X(t))$$

がS連続かつS有限となることである。ただし，$t \in {}^*\mathbb{R}$ の関数 $f(t)$ がS連続であるとは，${}^\circ a = {}^\circ b \in \mathbb{R}$ を満す任意の a，$b \in {}^*\mathbb{R}$ に対して，$f(a) \approx f(b)$ が成立することをいう。また，S有限であるとは，このような $a \in {}^*\mathbb{R}$ に対して，${}^\circ|f(a)| < \infty$ となることをいう。

（証明）（十分性）$M(\varphi_X(t)-1)$ がS連続かつS有限とする。このとき，${}^\circ t \in \mathbb{R}$ となる t に対して，$\varphi_X(t)-1 \approx 0$ だから

$$\begin{aligned}\varphi_{\sum_{n=1}^{M} X_n}(t) &= \varphi_X(t)^M \\ &= (1+\varphi_X(t)-1)^M \\ &\approx e^{M(\varphi_X(t)-1)}\end{aligned}$$

となり，$\varphi_{\sum_{n=1}^{M} X_n}$ はS連続となる。このことは，特性関数に関する基本性質から

$$P\left({}^\circ\sum_{n=1}^{M} X_n \in \mathbb{R}\right) = 1$$

を意味する。

（必要性）

$$P\left({}^{\circ}\sum_{n=1}^{M} X_n \in \mathbb{R}\right) = 1$$

が成立するとする。$\mathbb{R}$値確率変数 ${}^{\circ}\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ の特性関数を φ と書くとき，${}^{\circ}t \in \mathbb{R}$ となる任意の t に対して

$$\varphi({}^{\circ}t) = {}^{\circ}\varphi_{\sum_{n=1}^{M} X_n}(t)$$

$$= {}^{\circ}\left(\varphi_X(t)^M\right) \in \mathbb{C}$$

が成立する。φ は特性関数だから，$\mathbb{R}$ 上の連続関数で $\varphi(0) = 1$ となる。$\varphi(t) = 0$ となる実数 t の絶対値の下限を T とする（$T = \infty$ を含めて）。明らかに，$T > 0$ である。${}^{\circ}t \in (-T, T)$ となる勝手な t に対して $\varphi_X(t) \approx 1$ となることを示す。

内関数 φ_X は $*$連続で，かつ，${}^*[0, t]$ で 0 にならないから，$\log \varphi_X$ も ${}^*[0, t]$ で $*$連続となる。ここで，$\varphi_X(t) \not\approx 1$ だとすれば，

$$a = \min\left\{|u-v|;\ u, v \in {}^*[0, t],\ \left|\log \varphi_X(u) - \log \varphi_X(v)\right| = \frac{1}{M}\right\}$$

とおくとき，中間値の定理より，$|u-v| < a$ となる任意の $u, v \in {}^*[0, t]$ に対して

$$\left|\log \varphi_X(u) - \log \varphi_X(v)\right| < \frac{1}{M}$$

となる。故に，a が無限小でないとすれば，$\log \varphi_X(t)$ が無限小となり，仮定 $\varphi_X(t) \not\approx 1$ に反す。これより，a は無限小となり，$u \approx v$ となる $u, v \in {}^*[0, t]$ で

$$|\log \varphi_X(u) - \log \varphi_X(v)| = \frac{1}{M}$$

となるものがとれる。このとき，

$$\xi = M(\log \varphi_X(v) - \log \varphi_X(u))$$

とおくと

$$\varphi_X(u)^M - \varphi_X(v)^M = \varphi_X(u)^M(1 - e^{\xi})$$

が成立し，また，$|\xi| = 1$ だから $1 - e^{\xi} \not\approx 0$ となる。また，仮定より

$$°(\varphi_X(u)^M) = \varphi(°u) \neq 0$$

だから，$\varphi_X(u)^M \not\approx 0$ となり，結局

$$\varphi_X(u)^M - \varphi_X(v)^M \not\approx 0$$

となり，$\varphi_X{}^M = \varphi_{\sum_{n=1}^{M} X_n}$ の S 連続性と矛盾する。以上より，$°t \in (-T, T)$ を満す任意の t に対して，$\varphi_X(t) \approx 1$ が結論される。

さらに，$°t \in (-T, T)$ を満す任意の t に対して，$\varphi_X(t)^M$

は有限でかつ無限小でないから

$$\varphi_X(t)^M = e^{M \log \varphi_X(t)}$$
$$= e^{M(\varphi_X(t)-1)(1+O(\varphi_X(t)-1))}$$
$$\approx e^{M(\varphi_X(t)-1)}$$

が成立し，$M(\varphi_X(t)-1)$は$^\circ t \in (-T, T)$を満すtの上でS連続かつS有限となる。故に，必要性の証明のためには，$T=\infty$となることを示せばよい。

$T<\infty$と仮定する。このとき，$\varphi(T)=0$ となる。($\tilde{X}_n$; $n=1,\cdots,M$)を(X_n, $n=1,\cdots,M$)と同分布をもち*独立な内的確率変数列とし，

$$Y_n = X_n - \tilde{X}_n \quad (n=1,\cdots,M)$$

とおく。仮定より

$$P\left(^\circ\sum_{n=1}^{M} Y_n \in \mathbb{R}\right) = 1$$

が成立している。また，$Y=Y_1$とおき，確率変数$^\circ\sum_{r=1}^{M} Y_n$の特性関数をψとするとき，

$$\varphi_Y(t) = |\varphi_X(t)|^2 \qquad (\forall t \in {}^*\mathbb{R})$$
$$\psi(t) = |\varphi(t)|^2 \qquad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成立する。故に，$\psi(T)=0$ となる。また，前段の議論を $(Y_n;\ n=1,\cdots,M)$ に対して適用すると，$M\left(1-\varphi_Y\left(\frac{T}{2}\right)\right)$ は有限となる。他方

$$
\begin{aligned}
0 &\leqq 1-\varphi_Y(T) \\
&= \int (1-\cos TY(\omega))\,d\mu(\omega) \\
&\leqq 4\int \left(1-\cos\frac{T}{2}Y(\omega)\right)d\mu(\omega) \\
&= 4\left(1-\varphi_Y\left(\frac{T}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

だから，$M(1-\varphi_Y(T))$ も有限となる。これより

$$
\begin{aligned}
0 = \psi(T) &= {}^{\circ}\!\left(\varphi_Y(T)^M\right) \\
&= {}^{\circ}\!\left(e^{M(\varphi_Y(T)-1)}\right) \\
&= e^{{}^{\circ}M(\varphi_Y(T)-1)} > 0
\end{aligned}
$$

となり矛盾する。以上より，$T=\infty$ となり証明が完了する。

$\mathbb{R}$値確率変数 Z が無限分解可能であることと，

$$
Z \overset{\mathcal{L}}{\doteq} {}^{\circ}\sum_{n=1}^{M} X_n
$$

となる $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 上の*独立同一分布に従がう内的確率変数列 $(X_n; n=1, \cdots, M)$ が存在することは同値であり，また，このような $(X_n; n=1, \cdots, M)$ は基本補題の条件を満していね。故に，以下が成立する。

系 確率変数 Z が無限分解可能であることと，$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 上の内的確率変数 X が存在して，特性関数 φ_Z に関して

$$\varphi_Z({}^\circ t) = e^{{}^\circ M(\varphi_X(t)-1)}$$

が ${}^\circ t \in \mathbb{R}$ を満す任意の $t \in {}^*\mathbb{R}$ に対して成立することは同値となる。

この系から，Lévy の標準形を導くためには，基本補題の条件を満すような内的確率変数 $X = X_1$ に対する ${}^\circ M(\varphi_X(t)-1)$ を詳細に調べればよい。この結果，以下に到達する。

定理（Lévy の標準形） 確率変数 Z が無限分解可能であるための必要十分条件は，$b \in \mathbb{R}$ と

$$\int \frac{dG(x)}{1+x^2} < \infty$$

を満す $\mathbb{R}$ 上の σ 有限な分布 G が存在して

ク

$$\varphi_2(t)=\exp\left(\int \frac{e^{itx}-1-it\sin x}{x^2}\,dG(x)+ibt\right)$$

が任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して成立することである。

[文献]

釜江哲朗：「超準手法にもとずく確率解析入門」，すうがくぶっくす 9，朝倉書店（近刊）